基于行业特性的多元系统风险因子 CreditRisk+模型[1]

彭建刚，吕志华

湖南大学金融管理研究中心，长沙（410079）

Email：pengjiangang@hotmail.com

摘 要：本文提出了基于行业特性的多元系统风险因子 CreditRisk+模型。行业风险因子之间相互独立的假设是原 CreditRisk+模型的明显缺陷，随后对其进行修正的单因子模型、复合 Gamma CreditRisk+模型和两阶段 CreditRisk+模型仍存在问题。本文在引入多元系统风险因子的基础上，将行业风险因子的形参数表示为系统风险因子的线性组合与反映该行业风险因子内在特性的参数之积，对原 CreditRisk+模型做了质的拓展，使得拓展后的基于行业特性的多元系统风险因子 CreditRisk+模型解决了两阶段 CreditRisk+模型忽视了行业风险因子自身特性这一关键问题，将系统和行业两重风险因子有机地结合起来；新 CreditRisk+模型能够将一般情形的行业风险因子协方差矩阵纳入该模型框架内，从而克服了复合 Gamma CreditRisk+模型要求行业风险因子之间的协方差必须相等的重大缺陷。本文证明了原 CreditRisk+模型、复合 Gamma CreditRisk+模型和两阶段 CreditRisk+模型都只是新 CreditRisk+模型的极端情形，这些情形难以将行业风险因子协方差矩阵很好地纳入模型框架内，从而会影响非预期损失计算的精度。

关键词：CreditRisk+模型，违约相关性，行业特性，多元系统风险因子

中图分类号：F832.21

1. 引 言

原 CreditRisk+模型[1]是由瑞士信贷第一波士顿（Credit Suisse First Boston，CSFB）于 1997 年推出的信用风险计量模型。该模型由于自身所需数据量小和给出了损失分布显示解等优点，一经推出就受到业界和理论界的广泛关注。然而，原 CreditRisk+模型存在着不足，其要求行业风险因子相互独立是明显缺陷。针对这一缺陷，许多学者进行了研究，其中以 Burgisser et al.、Giese 和 Iyer et al.的成果具有代表性。

Burgisser et al. 于 1999 年提出考虑了行业风险因子相关性的单因子模型[2]（The Single-Factor Model）。在单因子模型中，首先将全部贷款按行业划分为不同的组合，对各贷款组合单独进行分析，分别计算各贷款组合违约损失的均值和方差；然后再假设全部贷款只受一个风险因子的影响，并且该风险因子服从均值为 1 的 Gamma 分布；在已知各行业之间相关系数的条件下，采用一种加权平均的方法求出全部贷款的相对违约方差(relative default variance)，即为该风险因子的方差。在此基础上，计算出整个贷款组合的违约损失分布。

Giese 于 2003 年提出了复合 Gamma CreditRisk+模型[3] (Compound Gamma CreditRisk+ model)。Giese 在原 CreditRisk+模型技术文档的基础上，引入一个新的随机变量，通过该随机变量对各个行业风险因子的形参数产生影响，从而使得各行业风险因子之间不再是相互独

[1] 本课题得到国家自然科学基金项目（编号：70673021）和教育部博士点基金项目（编号：20060532011）的资助。

立的，并以此为基础计算出了整个贷款组合的违约损失分布。

Giese(2003)将其提出的复合 Gamma CreditRisk+模型与单因子模型进行了比较，他发现单因子模型可以归结为复合 Gamma CreditRisk+模型的一种特殊情形。单因子模型假设整个贷款组合只受一个风险因子的影响，通过加权平均的方法求出该风险因子的方差，这忽略了各个行业的风险特征。 Giese 通过数值实验发现，在一定置信水平下，单因子模型计算出来的 VaR 甚至比基于行业风险因子相互独立的原 CreditRisk+模型计算出来的 VaR 还要小，从而证实了用单因子模型计算违约损失确实存在很大的误差。但是，Giese 本人提出的复合 Gamma CreditRisk+模型要求各个行业风险因子之间的协方差相等，这显然与现实情况不符。

Iyer et al.于 2005 年在注意到复合 Gamma CreditRisk+模型不足的情况下，提出了两阶段 CreditRisk+模型[4] (The Two Stage CreditRisk+ Model)。Iyer et al.通过引入新的随机变量——系统风险因子，并分别将各行业风险因子表示为这些系统风险因子的线性组合，在此基础上计算出了贷款组合的违约损失分布。然而，行业风险因子并非完全由系统风险因子决定的，两阶段 CreditRisk+模型夸大了系统风险因子的影响而忽视了各行业风险因子的内在特性，因而该模型在理论上难以成立，计算出来的结果会产生较大的误差。

通过上面的分析可以看出，不管是单因子模型、复合 Gamma CreditRisk+模型还是两阶段 CreditRisk+模型，都没有能够解决原 CreditRisk+模型行业风险因子之间的相关性问题。行业风险因子之间的相关性对债务人之间的违约相关性有直接的影响，而债务人之间的违约相关性的大小直接体现出贷款组合的风险分散化程度，对贷款组合非预期损失的计算非常重要。本文针对原 CreditRisk+模型、复合 Gamma CreditRisk+模型和两阶段 CreditRisk+模型存在的问题，考虑了系统风险因子与行业风险因子的有机联系以及行业风险因子的内在特性，对原 CreditRisk+模型进行了质的拓展，使得拓展后的基于行业特性的多元系统风险因子 CreditRisk+模型（本文简称新的 CreditRisk+模型）解决了两阶段 CreditRisk+模型忽视了行业风险因子本身特性这一关键问题，并且克服了复合 Gamma CreditRisk+模型要求行业风险因子之间的协方差必须相等的重大缺陷。本文证明了原 CreditRisk+模型、复合 Gamma CreditRisk+模型及两阶段 CreditRisk+模型分别只是新的 CreditRisk+模型的某种极端情形。

2. 原 CreditRisk+模型、复合 Gamma CreditRisk+模型及两阶段 CreditRisk+模型的缺陷

2.1 原 CreditRisk+模型及其缺陷

在原 CreditRisk+模型技术文档中，对于某一债务人 A，由于受行业风险因子 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_K$ 的影响，其违约概率可以表示成：

$$p_A(\gamma)=p_A\sum_{k=1}^{K}g_k^A\gamma_k\text{，其中}\sum_{k=1}^{K}g_k^A=1\text{，}p_A\text{为债务人 A 的无条件违约概率。}$$

在技术文档中，假设这 K 个行业风险因子之间相互独立，并且分别服从均值为 1 的 Gamma 分布。

债务人 A 的违约损失概率生成函数可以表示成：

$$G_A(z)=1-p_A(\gamma)+p_A(\gamma)z^{v_A}=1+p_A(\gamma)(z^{v_A}-1)\approx e^{p_A(\gamma)(z^{v_A}-1)},$$

债务人之间在系统风险因子的影响下条件独立，因此整个贷款组合的违约损失概率生成函数可以表示成：

$$G(z|\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_K)=\prod_A G_A(z)=\prod_A e^{p_A(\gamma)(z^{v_A}-1)}=e^{\sum_A p_A(\gamma)(z^{v_A}-1)}=e^{\sum_A p_A\sum_{k=1}^{K}g_k^A\gamma_k(z^{v_A}-1)}$$
$$=e^{\sum_{k=1}^{K}\gamma_k(\sum_A g_k^A p_A(z^{v_A}-1))}=e^{\sum_{k=1}^{K}\gamma_k P_k(z)}, \tag{1}$$

其中：$P_k(z)=\sum_A g_k^A p_A(z^{v_A}-1)$，

所以：$G(z)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{\sum_{k=1}^{K}\gamma_k P_k(z)}\prod_{k=1}^{K}g_{\alpha_k,\beta_k}(\gamma_k)d\gamma_1\cdots d\gamma_K$，

而：$\int_0^\infty e^{xP_k(z)}g_{\alpha_k,\beta_k}(x)dx=\int_0^\infty e^{xP_k(z)}\cdot\frac{1}{\beta_k^{\alpha_k}\Gamma(\alpha_k)}\cdot e^{-\frac{x}{\beta_k}}\cdot x^{\alpha_k-1}\cdot dx=\frac{1}{(1-\beta_k P_k(z))^{\alpha_k}}$，

所以：$G(z)=\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{(1-\beta_k P_k(z))^{\alpha_k}}=e^{-\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\ln(1-\beta_k P_k(z))}$，

因为：γ_k 服从均值为 1、方差为 σ_k^2 的 Gamma 分布，

所以：$\alpha_k=\frac{1}{\sigma_k^2}$， $\beta_k=\sigma_k^2$，

所以贷款组合的违约损失概率生成函数为：

$G(z)=e^{-\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\sigma_k^2}\ln(1-\sigma_k^2 P_k(z))}$，其中：$P_k(z)=\sum_A g_k^A p_A(z^{v_A}-1)$。

债务人的违约概率是受行业风险因子影响的，而行业风险因子受各种宏观经济变量的作用导致它们之间具有相关性。但在上述原 CreditRisk+模型中，假设行业风险因子之间是相互独立的；在违约概率可变时，低估了贷款组合的实际风险水平，故降低了该模型的使用价值。

2.2 复合 Gamma CreditRisk+模型及其缺陷

Giese（2003）对原 CreditRisk+模型行业风险因子之间的相关性进行修正，提出了复合 Gamma CreditRisk+模型。他仍然假设债务人之间的违约相关性是通过行业风险因子对它们的影响实现的，但是通过引入一个新的随机变量，使得行业风险因子之间不再是相互独立的。

债务人 A 因受行业风险因子的影响，其违约概率可以表示为：

$p_A(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_K)=p_A\sum_{k=1}^{K}g_k^A\gamma_k$，其中$\sum_{k=1}^{K}g_k^A=1$，$p_A$为债务人 A 的无条件违约概率。

在 CreditRisk+模型技术文档中，这 K 个行业风险因子之间是相互独立的。为了对这一假设条件进行修正，Giese 在此基础上引入一个新的随机变量γ_0，γ_0服从均值为 1、方差为σ^2的 Gamma 分布。

行业风险因子$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_K$服从均值为 1 的 Gamma 分布，它们的形参数和规模参数分别为α_k和β_k。Giese 假设它们的形参数α_k可以分别表示成：

$\alpha_k=\gamma_0\overline{\alpha_k}$，$\overline{\alpha_k}$为一常数，$k=1,2,\cdots,K$。

对于债务人 A，其违约损失概率生成函数可以表示成：

$$G_A(z|\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_K)=e^{p_A\sum_{k=1}^{K}g_k^A\gamma_k(z^{v_A}-1)},$$

从而整个贷款组合的违约损失概率生成函数可以表示成：

$$G(z|\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_K)=\prod_A G_A(z|\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_K)=\prod_A e^{p_A\sum_{k=1}^{K}g_k^A\gamma_k(z^{v_A}-1)}=e^{\sum_{k=1}^{K}\gamma_k P_k(z)},$$

其中：$P_k(z)=\sum_A p_A g_k^A(z^{v_A}-1)$，

所以：$$G(z|\gamma_0)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{\sum_{k=1}^{K}\gamma_k P_k(z)}\prod_{k=1}^{K}g_{\alpha_k,\beta_k}(\gamma_k)d\gamma_1\cdots d\gamma_K=\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{(1-\beta_k P_k(z))^{\alpha_k}},\quad(2)$$

因为 γ_k 的均值为 1，所以 $\alpha_k=\frac{\gamma_0}{\beta_k}$，

所以：$$G(z|\gamma_0)=\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{(1-\beta_k P_k(z))^{\frac{\gamma_0}{\beta_k}}}=e^{\gamma_0[-\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\beta_k}\ln(1-\beta_k P_k(z))]},$$

因为 γ_0 服从均值为 1、方差为 σ^2 的 Gamma 分布，

所以：$$G(z)=\int_0^\infty e^{\gamma_0[-\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\beta_k}\ln(1-\beta_k P_k(z))]}\cdot\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{\gamma_0}{\beta}}\gamma_0^{\alpha-1}d\gamma_0=e^{-\alpha\ln(1+\beta(\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\beta_k}\ln(1-\beta_k P_k(z))))},$$

又因为：$\alpha=\frac{1}{\sigma^2}$，$\beta=\sigma^2$，

所以：$G(z)=e^{-\frac{1}{\sigma^2}\ln(1+\sigma^2(\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\beta_k}\ln(1-\beta_k P_k(z))))}$，其中 $P_k(z)=\sum_A p_A g_k^A(z^{v_A}-1)$。

Giese 经计算发现，行业风险因子之间的协方差 σ_{kl} 与随机变量 γ_0 的方差 σ^2 存在如下关系：

$$\sigma_{kl}=\delta_{kl}\beta_k+\sigma^2\text{，其中：}\delta_{kl}=\begin{cases}0,k\neq l\\1,k=l\end{cases}.\quad(3)$$

所以，当 $k=l$ 时，由于 $\beta_k>0$，所以 $\sigma_{kk}>\sigma^2$，即每个行业风险因子的方差都要大于随机变量 γ_0 的方差 σ^2；当 $k\neq l$ 时，由于 $\delta_{kl}=0$，所以 $\sigma_{kl}=\sigma^2$，即任意两个行业风险因子之间的协方差都是相等的，都等于随机变量 γ_0 的方差 σ^2。

从上面的推导可知，复合 Gamma CreditRisk+模型是在原 CreditRisk+模型技术文档的基础上，引入了随机变量 γ_0，它对所有行业风险因子都产生影响。该模型通过 γ_0 对行业风险因子的形参数产生影响从而使得行业风险因子之间不再独立。然而该模型产生了新的问题：即要求任意两个行业风险因子之间的协方差都相等（见式 3）；这与现实不符，因而该模型在实际应用中仍存在很大的局限性。

2.3 两阶段 CreditRisk+模型及其缺陷

Iyer et al. (2005) 在注意到复合 Gamma CreditRisk+模型不足的情况下，提出了两阶段

CreditRisk+模型。Iyer et al.采用主成分分析方法，从一系列系统宏观经济因素中选取了 N 个系统风险因子 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_N$，并假设行业风险因子可以分别表示成如下形式：

$$\gamma_k = b_{k1}Y_1 + b_{k2}Y_2 + \cdots + b_{kN}Y_N,\ k=1,2,\cdots,K,\ \text{其中}\sum_{i=1}^{N} b_{ki}=1,$$

由（1）可知：$G(z|Y_1,Y_2,\cdots,Y_N) = e^{\sum_{k=1}^{K}\gamma_k P_k(z)} = e^{\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} b_{ki}Y_iP_k(z)} = e^{\sum_{i=1}^{N}Y_i\sum_{k=1}^{K} b_{ki}P_k(z)} = e^{\sum_{i=1}^{N}Y_iQ_i(z)}$，

其中：$Q_i(z)=\sum_{k=1}^{K} b_{ki}P_k(z)$，$P_k(z)=\sum_{A} p_A g_k^A(z^{v_A}-1)$。

因为 Y_i 服从均值为 1、方差为 δ_i^2 的 Gamma 分布，所以：

$$G(z)=\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} e^{\sum_{i=1}^{N}Y_iQ_i(z)}\prod_{i=1}^{N} g_{\alpha_i,\beta_i}dY_1\cdots dY_N = \prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(1-\beta_iQ_i(z))^{\alpha_i}} = e^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\delta_i^2}\cdot\ln(1-\delta_i^2Q_i(z))}。$$

两阶段 CreditRisk+模型行业风险因子的方差和它们之间的协方差分别为：

$$\mathrm{var}[\gamma_k]=\mathrm{var}[b_{k1}Y_1+b_{k2}Y_2+\cdots+b_{kN}Y_N]=b_{k1}^2\delta_1^2+b_{k2}^2\delta_2^2+\cdots+b_{kN}^2\delta_N^2,$$

$$Cov(\gamma_k,\gamma_l)=E(\gamma_k\cdot\gamma_l)-E(\gamma_k)\cdot E(\gamma_l)=E(\gamma_k\cdot\gamma_l)-1=\sum_{i=1}^{N} b_{ki}b_{li}\delta_i^2。$$

然而，我们注意到，在两阶段 CreditRisk+模型中，债务人 A 的违约概率为：

$p_A(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_K)=p_A\sum_{k=1}^{K} g_k^A\gamma_k$，其中 $\sum_{k=1}^{K} g_k^A=1$，p_A 为债务人 A 的无条件违约概率，

而 $\gamma_k = b_{k1}Y_1 + b_{k2}Y_2 + \cdots + b_{kN}Y_N$，$k=1,2,\cdots,K$，其中 $\sum_{i=1}^{N} b_{ki}=1$，

所以：$p_A(Y_1,Y_2,\cdots,Y_N)=p_A\sum_{k=1}^{K} g_k^A(\sum_{i=1}^{N} b_{ki}Y_i)=p_A\sum_{i=1}^{N}Y_i(\sum_{k=1}^{K} g_k^A b_{ki})=p_A\sum_{i=1}^{N} c_i^AY_i$，

其中：$c_i^A=\sum_{k=1}^{K} g_k^A b_{ki}$，$i=1,2,\cdots,N$，且有 $\sum_{i=1}^{N} c_i^A=1$。

从上面的推导可知，两阶段 CreditRisk+模型的违约损失概率生成函数在形式上与假设行业风险因子相互独立的原 CreditRisk+模型没有任何区别，如果能够直接估计出系统风险因子对债务人的影响权重 c_i^A，那么两阶段 CreditRisk+模型就可以完全跳过行业风险因子，直接由系统风险因子对债务人产生影响，从而得出贷款组合的违约损失概率生成函数，这就相当于直接用系统风险因子替代了行业风险因子，而两阶段 CreditRisk+模型又假设系统风险因子是相互独立的，这就回到了原 CreditRisk+模型的思路上。另外，我们认为行业风险因子并非完全由系统风险因子决定，如果将行业风险因子的方差及它们之间的协方差完全归为系统风险因子的作用，就忽略了各个行业风险因子的自身特性。因而该模型在理论上难以成立，用该模型来计算贷款组合的非预期损失，显然会使得计算出来的结果产生较大的误差。

3. 基于行业特性的多元系统风险因子 CreditRisk+模型的提出

为了克服复合 Gamma CreditRisk+模型的缺陷，同时避免两阶段 CreditRisk+模型的错误，本文引入反映系统风险的多元随机变量，并分别将行业风险因子的形参数表示为这些随机变量的线性组合与反映该行业风险因子内在特性的参数之积，从而得到一种新的 CreditRisk+

模型。

3.1 违约损失概率生成函数的计算

在原 CreditRisk+模型技术文档中，假设行业风险因子$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_K$相互独立，并且都服从均值为 1 的 Gamma 分布，它们的形参数和规模参数分别为α_k和β_k。

为了对原 CreditRisk+模型行业风险因子引入更一般的相关性结构，本文从宏观经济变量中选取一些系统风险因子$Y_1,Y_2,\cdots,Y_N$，并假设其服从均值为 1、方差为δ_i^2，$i=1,2,\cdots,N$的 Gamma 分布。行业风险因子受系统风险因子的影响，假设其形参数可分别表示为：

$$\alpha_k=(b_{k1}Y_1+b_{k2}Y_2+\cdots+b_{kN}Y_N)\overline{\alpha_k}\text{，}\overline{\alpha_k}\text{ 为一常数，且 }\sum_{i=1}^{N}b_{ki}=1\text{，}k=1,2,\cdots,K\text{。}$$

由于行业风险因子的期望为 1，所以：$\alpha_k=\dfrac{b_{k1}Y_1+b_{k2}Y_2+\cdots+b_{kN}Y_N}{\beta_k}$。 (4)

在$Y_1,Y_2,\cdots,Y_N$的条件下，由（2）可知，贷款组合的违约损失概率生成函数可以表示成：

$$G(z|Y_1,Y_2,\cdots,Y_N)=\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{(1-\beta_kP_k(z))^{\frac{\sum_{i=1}^{N}b_{ki}Y_i}{\beta_k}}}=e^{-\sum_{i=1}^{N}Y_i\sum_{k=1}^{K}\frac{b_{ki}}{\beta_k}\ln(1-\beta_kP_k(z))}=e^{\sum_{i=1}^{N}A_i(z)\cdot Y_i},$$

其中：$A_i(z)=-\sum_{k=1}^{K}\dfrac{b_{ki}}{\beta_k}\ln(1-\beta_kP_k(z))$，

所以：

$$G(z)=\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}e^{\sum_{i=1}^{N}Y_iA_i(z)}\prod_{i=1}^{N}g_{\alpha_i,\beta_i}dY_1\cdots dY_N=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(1-\beta_iA_i(z))^{\alpha_i}}=e^{-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\cdot\ln(1-\beta_iA_i(z))},$$

因为假设Y_i服从均值为 1、方差为δ_i^2的 Gamma 分布，

所以：$\alpha_i=\dfrac{1}{\delta_i^2}$，$\beta_i=\delta_i^2$。

所以：$G(z)=e^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\delta_i^2}\cdot\ln(1-\delta_i^2A_i(z))}$， (5)

其中：$A_i(z)=-\sum_{k=1}^{K}\dfrac{b_{ki}}{\beta_k}\ln(1-\beta_kP_k(z))$，$P_k(z)=\sum_{A}g_k^Ap_A(z^{v_A}-1)$。

我们现在来对违约损失概率生成函数(5)进行分析。在(5)中，令$\delta_i\to0$，$i=1,2,\cdots,N$，则：

$$G(z)=e^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\delta_i^2}\cdot(-\delta_i^2A_i(z))}=e^{\sum_{i=1}^{N}A_i(z)}=e^{-\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\frac{b_{ki}}{\beta_k}\ln(1-\beta_kP_k(z))}=e^{-\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\beta_k}\ln(1-\beta_kP_k(z))},$$

上式就为原 CreditRisk+模型的违约损失概率生成函数，而系统风险因子方差为 0 即相当于该系统风险因子变为常数 1，因此原 CreditRisk+模型是新的 CreditRisk+模型在所有的系统风险因子为常数 1 的极端情形。在（5）式中，令所有的行业风险因子规模参数$\beta_k\to0$，则（5）式就变成了两阶段 CreditRisk+模型的违约损失概率生成函数，而这里行业风险因子

的规模参数即相当于在没受到系统风险因子影响时该行业风险因子的方差，反映了该行业风险因子的内在特性，因此，两阶段 CreditRisk+模型是新的 CreditRisk+模型在所有反映行业风险因子内在特性的规模参数趋近于 0 的极端情形。显然复合 Gamma CreditRisk+模型是新的 CreditRisk+模型在系统风险因子个数为 1 时的极端情形。

可以作出判断，这些极端情形很难将系统和行业两重风险因子很好地结合起来，用这些模型计算非预期损失，在违约概率可变时会产生较大的误差。本文提出的新的 CreditRisk+模型则可以将一般情形的行业风险因子协方差矩阵纳入该模型框架内，成功地将系统风险因子从一元拓展到多元，既克服了复合 Gamma CreditRisk+模型要求行业风险因子之间的协方差必须相等的缺陷，又解决了两阶段 CreditRisk+模型忽视行业风险因子内在特性的问题，因此可以用来更精确地计算贷款组合的非预期损失。

3.2 行业风险因子之间协方差的计算

现在来计算新 CreditRisk+模型行业风险因子之间的协方差矩阵。

由（3）可知：$\alpha_k = \dfrac{b_{k1}Y_1 + b_{k2}Y_2 + \cdots + b_{kN}Y_N}{\beta_k}$，所以：

$$\mathrm{var}_{Y_1,Y_2,\cdots,Y_N}[\gamma_k | Y_1, Y_2, \cdots, Y_N] = \beta_k (b_{k1}Y_1 + b_{k2}Y_2 + \cdots + b_{kN}Y_N)\,,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[\gamma_k] &= E_{Y_1,Y_2,\cdots Y_N}[\mathrm{var}_{Y_1,Y_2,\cdots,Y_N}[\gamma_k | Y_1, Y_2, \cdots, Y_N]] + \mathrm{var}_{Y_1,Y_2,\cdots Y_N}[E[\gamma_k | Y_1, Y_2, \cdots, Y_N]] \\ &= \beta_k (b_{k1} + b_{k2} + \cdots + b_{kN}) + \mathrm{var}[b_{k1}Y_1 + b_{k2}Y_2 + \cdots + b_{kN}Y_N] \\ &= \beta_k + (b_{k1}^2\delta_1^2 + b_{k2}^2\delta_2^2 + \cdots + b_{kN}^2\delta_N^2)\,。\end{aligned} \tag{6}$$

当 $k \neq l$ 时：$Cov(\gamma_k, \gamma_l) = E(\gamma_k \cdot \gamma_l) - E(\gamma_k) \cdot E(\gamma_l)$

$$\begin{aligned} &= E_{Y_1,Y_2,\cdots,Y_N}[E_{Y_1,Y_2,\cdots,Y_N,k,l}[\gamma_k \cdot \gamma_l | Y_1, Y_2, \cdots, Y_N]] - 1 \\ &= E_{Y_1,Y_2,\cdots Y_N}[E_{Y_1,Y_2,\cdots Y_N,k}[\gamma_k | Y_1, Y_2, \cdots Y_N] \cdot E_{Y_1,Y_2,\cdots Y_N,l}[\gamma_l | Y_1, Y_2, \cdots Y_N]] - 1 \\ &= E_{Y_1,Y_2,\cdots Y_N}[(b_{k1}Y_1 + b_{k2}Y_2 + \cdots + b_{kN}Y_N) \cdot (b_{l1}Y_1 + b_{l2}Y_2 + \cdots + b_{lN}Y_N)] - 1 \\ &= b_{k1}b_{l1}\delta_1^2 + b_{k2}b_{l2}\delta_2^2 + \cdots + b_{kN}b_{lN}\delta_N^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{b}_{\mathrm{ki}} b_{li}\delta_i^2\,。\end{aligned} \tag{7}$$

从（6）式、（7）式可以看出，行业风险因子的协方差完全受系统风险因子的影响，而行业风险因子的方差则受系统风险因子和行业风险因子自身的内在特性共同作用。在极端情形下，当系统风险因子的方差都为 0，这时行业风险因子之间相互独立，它们分别服从均值为 1、方差为 β_k 的 Gamma 分布，这其实与未引入系统风险因子时的原 CreditRisk+模型是一致的。因此，可以看出，在本文提出的新的 CreditRisk+模型中，系统风险因子会影响行业风险因子，但没有完全决定行业风险因子，行业风险因子还存在不由系统风险因子决定的内在特性。这符合实际情况。

在实际应用中，需根据行业风险因子的自身特性和它们之间的协方差矩阵，事先估计出行业风险因子的规模参数 β_k，即在没受到系统风险因子影响时行业风险因子的方差，然后根据行业风险因子之间的协方差矩阵和（6）式、（7）式估计出相应的参数。假设给定了 N 个系统风险因子 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$，K 个行业风险因子 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_K$，则在新的 CreditRisk+模型中，共需确定 $(K+1) \times N$ 个参数，即行业风险因子表达式中的系数矩阵 $(b_{ki})_{K \times N}$ 及系统风险

因子$Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$的方差$\delta_1^2, \delta_2^2, \cdots, \delta_N^2$。如果已知这 K 个行业风险因子之间的协方差矩阵，结合上面方差与协方差的计算公式，则相当于有了$\frac{K(1+K)}{2}$个方程。又由于$\sum_{i=1}^{N} b_{ki} = 1$，所以又有了 K 个约束。因此共有$\frac{K(K+3)}{2}$个约束条件。

当需要确定的参数个数与约束条件的个数相等时，即$N = \frac{K(K+3)}{2(K+1)}$，这时方程组有唯一解。如果方程个数多于需要确定参数的个数时，这时只有最小二乘解，而最小二乘解是近似解，存在误差。因此，在实际应用中，我们建议系统风险因子个数为不小于$\frac{K(K+3)}{2(K+1)}$的最小整数。

4. 实证研究

现实中，行业风险因子受宏观经济变量这样的系统风险因子的作用，行业风险因子之间是相互关联的。如果假设它们相互独立，就会低估了贷款组合的信用风险。因为单因子模型、复合 Gamma CreditRisk+模型和本文提出的新 CreditRisk+模型已考虑了行业风险因子之间的相关性，故在一定置信水平下，运用它们所计算出的的 VaR 应比原 CreditRisk+模型计算出的 VaR 大。

下面，我们选取一组数据，将新的 CreditRisk+模型（模型 4）与原 CreditRisk+模型（模型 1）、单因子模型（模型 2）和复合 Gamma CreditRisk+模型（模型 3）进行比较。

假设整个贷款组合来自 4 个不同的行业，各个行业的行业风险因子分别记为γ_1、γ_2、γ_3和γ_4，它们都服从均值为 1 的 Gamma 分布。假设每个行业分别有 100 笔贷款，我们分别对每个行业中的贷款从 1 到 100 进行标号。假设它们的违约概率和经违约损失率调整后的风险敞口分别为：

$$p_{ij} = \begin{cases} 1\%, i = 4k-3 \\ 2\%, i = 4k-2 \\ 3\%, i = 4k-1 \\ 4\%, i = 4k \end{cases}, \quad v_{ij} = i, \quad i \in N^+, \text{即} i \text{为正整数。}$$

p_{ij}、v_{ij}分别为行业j中债务i的违约概率和经违约损失率调整后的风险敞口。

在计算过程中，考虑到 Panjer 算法计算的不稳定性[5]，本文使用 Giese 提出的嵌套计算方法[3] [6]（nested calculation approach）进行计算，该方法可以表示成如下两个递推关系：

假设存在多项式$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$、$Q(z) = \sum_{n=0}^{N_{\max}} q_n z^n$，

如果它们之间满足：$P(z) = e^{Q(z)}$，则有如下递推关系：

$$\begin{cases} p_0 = e^{q_0} \\ p_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} q_j p_{n-j}, n > 0 \end{cases},$$

如果它们之间满足：$Q(z) = \ln P(z)$，则有如下递推关系：

$$\begin{cases} q_0 = \ln p_0 \\ q_n = \dfrac{1}{p_0}(p_n - \sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{j}{n}q_j p_{n-j}), n > 0 \end{cases},$$

为了简化模型的参数输入，我们假设债务人的违约概率只受该债务人所在行业的行业风险因子的影响。下面我们将在行业风险因子之间的协方差相等和不等两种情况下分别计算出上述贷款组合在不同置信水平下对应的 VaR，并对不同模型计算出来的结果进行比较。

4.1 行业风险因子之间的协方差相等

不失一般性，假设模型 3 中随机变量 γ_0 的方差 σ^2 为 0.01。四个行业的行业风险因子 γ_1、γ_2、γ_3 和 γ_4 的方差分别为 0.04、0.09、0.16 和 0.81。此时行业风险因子之间的协方差矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0.04 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.09 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.16 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.81 \end{bmatrix},$$

由（2）可知，在模型 3 中，4 个行业风险因子的规模参数 β_1、β_2、β_3 和 β_4 的取值分别为 0.03、0.08、0.15 和 0.8。

为了保持与模型 3 具有相同的行业风险因子相关性结构，根据模型 3 的输入参数，我们假定在模型 4 中，4 个行业风险因子的规模参数仍分别为 0.03、0.08、0.15 和 0.8。然后，根据我们给出的系统风险因子个数的确定方法，假设贷款组合的行业风险因子受 3 个系统风险因子 Y_1, Y_2, Y_3 的影响，再根据（6）式、（7）式和协方差矩阵之间的关系，可计算出这 3 个系统风险因子的方差分别为 $\delta_1^2 = 0.0975, \delta_2^2 = 0.04, \delta_3^2 = 0.01$，且行业风险因子形参数的表达式为：$\alpha_1 = 0.2Y_1 + 0.3Y_2 + 0.5Y_3$，$\alpha_2 = 0.2Y_1 + 0.3Y_2 + 0.5Y_3$，$\alpha_3 = 0.2Y_1 + 0.3Y_2 + 0.5Y_3$，$\alpha_4 = 0.2Y_1 + 0.3Y_2 + 0.5Y_3$。

我们使用 MatLab7.0 进行编程，采用嵌套计算方法，用模型 1、模型 2、模型 3 和模型 4 分别计算出贷款组合在 90%、95%、99%、99.5%和 99.9%的置信水平下的 VaR。各模型在相应置信水平下的 VaR 分别如表 1 所示：

表 1 各模型在不同置信水平下对应的 VaR

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
模型 1	812	925	1168	1268	1499
模型 2	817	925	1145	1232	1421
模型 3	819	934	1181	1282	1516
模型 4	819	934	1181	1282	1517

从表 1 可以看出，模型 3 和模型 4 计算出来的结果，相应的都比相同置信水平下模型 1 计算出来的结果要大，但是当置信水平大于 99%时，模型 2 计算出来的结果，却比相同置信水平下模型 1 计算出来的结果要小，这与我们的预期不一致。这是因为，模型 2 使用加权

平均的方法计算出整个贷款组合的相对违约方差，然后将计算出来的相对违约方差代替各个行业的系统风险因子的方差，没能将行业 4 的风险充分的反映出来。另外，我们发现，模型 3 和模型 4 计算出来的结果非常接近，这是因为模型 4 是对模型 3 的拓展，是其一般形式，而我们设定了各个行业风险因子之间的协方差一致，所以，对这两个模型来说，输入的参数是一致的，各个行业风险因子之间的相关性结构是一致的，因此它们的结果也应该是一致的，这也从另一个方面说明我们提出的新的 CreditRisk+模型是合理的。

另外，为了检验模型 4 在行业风险因子的规模参数和它们之间的协方差矩阵保持不变的情况下，引入的系统风险因子个数及行业风险因子形参数表达式中系数的变化对计算结果的影响，我们做了如下三组实验：

1）行业风险因子行参数的表达式保持不变，而系统风险因子的方差变为 $\delta_1^2=0.02,\delta_2^2=0.02,\delta_3^2=0.0296$ 时；2）行业风险因子的形参数与系统风险因子之间的线形组合表示成：$\alpha_1=0.3Y_1+0.3Y_2+0.4Y_3$，$\alpha_2=0.3Y_1+0.3Y_2+0.4Y_3$，$\alpha_3=0.3Y_1+0.3Y_2+0.4Y_3$，$\alpha_4=0.3Y_1+0.3Y_2+0.4Y_3$，此时系统风险因子的方差为 $\delta_1^2=0.01,\delta_2^2=0.01,\delta_3^2=0.05125$ 时；3）行业风险因子的形参数与系统风险因子之间的线形组合表示成：

$$\begin{cases}\alpha_1=0.1Y_1+0.3Y_2+0.4Y_3+0.2Y_4\\ \alpha_2=0.1Y_1+0.3Y_2+0.4Y_3+0.2Y_4\\ \alpha_3=0.1Y_1+0.3Y_2+0.4Y_3+0.2Y_4\\ \alpha_4=0.1Y_1+0.3Y_2+0.4Y_3+0.2Y_4\end{cases}$$

，系统风险因子的方差为 $\delta_1^2=0.06$，$\delta_2^2=0.02$，$\delta_3^2=0.04$，$\delta_4^2=0.03$ 时。我们发现，这 3 组实验计算出来的任一置信水平下的 VaR 与表 1 中模型 4 在相应置信水平下的 VaR 是一样的。

从上面的数值试验可以看出，当行业风险因子之间的协方差相等时，模型 3 和模型 4 计算出来的结果非常接近，并且在行业风险因子的规模参数和它们之间的协方差矩阵保持不变的情况下，系统风险因子的个数及行业风险因子形参数表达式中系数的变化对计算的结果并不会产生影响，即在给定了行业风险因子的规模参数和它们之间的协方差矩阵的条件下，计算出来的结果是唯一的。

4.2 行业风险因子之间的协方差不相等

行业风险因子之间的协方差不相等时，这时模型 4 和模型 3 的计算结果分别如何呢？我们仍采用上面的贷款数据，只不过这时行业风险因子之间的协方差矩阵变为：

$$\begin{bmatrix}0.05 & 0.0145 & 0.0141 & 0.066\\ 0.0145 & 0.06 & 0.0147 & 0.0663\\ 0.0141 & 0.0147 & 0.07 & 0.0666\\ 0.066 & 0.0663 & 0.0666 & 0.6\end{bmatrix},$$

在模型 4 中，假设 4 个行业风险因子的规模参数分别为：0.0351，0.0454，0.0547，0.0811。根据协方差矩阵和给定的规模参数值，行业风险因子的形参数可以表示为：

$$\begin{cases}\alpha_1 = 0.8Y_1 + 0.1Y_2 + 0.1Y_3 \\ \alpha_2 = 0.7Y_1 + 0.2Y_2 + 0.1Y_3 \\ \alpha_3 = 0.6Y_1 + 0.3Y_2 + 0.1Y_3 \\ \alpha_4 = 0.1Y_1 + 0.1Y_2 + 0.8Y_3\end{cases}$$，此时 Y_1, Y_2, Y_3 的方差分别为：0.01，0.04，0.81。

在模型 3 中，我们使用 Giese(2003)提出方法的估计随机变量 γ_0 的方差，即：

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k \neq l} EL_k V_{kl} EL_l}{\sum_{k \neq l} EL_k EL_l}, \tag{8}$$

其中，EL_k 和 EL_l 分别为行业 k 和行业 l 中贷款组合的预期损失，V_{kl} 为行业风险因子 k 和行业风险因子 l 之间的协方差。

模型 4 和模型 1、模型 2、模型 3 计算出来的各个置信水平下的 VaR 分别如表 2 所示：

表 2 各模型在不同置信水平下对应的 VaR

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
模型 1	798	901	1118	1205	1401
模型 2	804	906	1112	1193	1368
模型 3	823	937	1174	1269	1481
模型 4	819	938	1199	1309	1575

从表 2 可以看出，在置信度大于 90%时，模型 3 和模型 4 计算出来的各个置信水平下的 VaR 都比相应置信水平下模型 1 计算出来的 VaR 要大，这与我们的预期一样，这说明它们都能够对贷款组合的尾部风险进行很好的估计。模型 2 在置信度大于 99.5%时，计算出来的结果比相应置信度下模型 1 计算出来的结果要小，这与我们的预期不一样，原因在上面已经给出。从表 2 可以看出，在置信度大于 95%时，模型 4 计算出来的结果比模型 3 在相同置信水平下计算出来的结果要大，即模型 4 相比模型 3，能够更好地模拟贷款组合的尾部风险。这是因为，对于模型 3，从（8）式可以看出，在实际给出一般协方差矩阵的情况下，它采用一种加权平均的方法估计出随机变量 γ_0 的方差，然后用估计出来的方差代替各个行业风险因子之间的协方差，即相当于用协方差都相等的协方差矩阵代替一般的协方差矩阵，这一过程显然存在误差。另外，在前面的分析中可知，在行业风险因子协方差都相等的情况下，模型 3 和模型 4 计算出来的结果是相等的。而现在协方差矩阵没有经过近似的模型 4 计算出来的结果要大，这就说明模型 4 能更好地模拟贷款组合的尾部违约损失分布。

从上面的分析可以看出，当行业风险因子之间的协方差不相等时，我们提出的新 CreditRisk+模型，可以将一般性的行业风险因子协方差矩阵纳入模型框架内，因而能够更好地模拟贷款组合的尾部分布，以精确地计算贷款组合的非预期损失。

5. 结论

1. 两阶段 CreditRisk+模型将行业风险因子完全表示成系统风险因子的线性组合，忽略了行业风险因子自身的内在特性，且其概率生成函数在形式上与原 CreditRisk+模型一样，从而回到了原 CreditRisk+模型的基本思路。

2. 与两阶段 CreditRisk+模型不同，本文将行业风险因子的形参数表示成系统风险因子

的线性组合与反映该行业风险因子内在特性参数之积。基于这一新的 CreditRisk+模型，行业风险因子的方差是由系统风险因子和反映行业风险因子内在特性的规模参数共同决定的。这一新的 CreditRisk+模型可以将一般情形的行业风险因子协方差矩阵纳入该模型框架内，从而克服了复合 Gamma CreditRisk+模型要求行业风险因子之间的协方差必须相等这一缺陷。

3. 通过实证发现，对于这一新的 CreditRisk+模型，在能将行业风险因子协方差矩阵完全纳入模型框架的前提下，只要行业风险因子的规模参数和它们之间的相关性矩阵给定，计算的结果就会保持不变，不会因系统风险因子的个数及系统风险因子方差的变化而变化。因此，估计出各个行业风险因子的规模参数及它们之间的协方差矩阵是应用该模型计量贷款组合非预期损失的关键。

4. 在新的 CreditRisk+模型中，本文给出了系统风险因子个数的确定方法。通过实证发现，在相关性结构相同的情况下，当行业风险因子之间的协方差相等时，新的 CreditRisk+模型与复合 Gamma CreditRisk+模型在相同置信水平下计算出来的 VaR 非常接近；当行业风险因子之间的协方差不相等时，新的 CreditRisk+模型相对复合 Gamma CreditRisk+模型，能够更好地估计贷款组合的尾部风险。因此，新的 CreditRisk+模型既保留了复合 Gamma CreditRisk+模型的优点，又克服了其缺点，为解决原 CreditRisk+模型行业风险因子相关性问题提出了一个圆满的方案，从而可以更加精确地计量贷款组合的非预期损失。

参考文献

[1] Credit Suisse Financial Products, CreditRisk+: A Credit Risk Management Framework[R], Credit Suisse Financial Products, 1997.

[2] Peter Burgisser, Alexandre Kurth , Armin Wagner, Michael Wolf , Integrating Correlations[J], Journal of Risk,1999, 12: 37-44.

[3] Giese Gotz , Enhancing CreditRisk+ [J], Risk, 2003, 16: 73-77.

[4] Dr. Srikanth K. Iyer, Amogh Deshpande, The CreditRisk+ Model With General Sector Correlations[OL], http://www.gloriamundi.org/detailpopup.asp?ID=453058130, 2005.

[5] Michael B.Gordy, Saddlepoint approximation of CreditRisk+ [J], Journal of Banking & Finance, 2002, 26: 1335-1353.

[6] Haaf H., Reiss O. and Schoenmakers B. , Numerically stable computation of CreditRisk+[R]. Technical report, Weierstrass-Institut, 2003.

Multi-system Risk Factors CreditRisk+ Model Based on Sector Character

Peng Jiangang, Lv Zhihua

(Research Center of Financial Management, Hunan University, Hunan 410079)

Abstract

We proposed the multi-system risk factors CreditRisk+ model that based on character of different sectors. The assuption that independence between different sector risk factors is an obvious drawback of the original CreditRisk+ model. The amened model such as the single factor model, the compound gamma CreditRisk+ model and the two stage CreditRisk+ model still have their own problems. In this paper, we introduced multi-system risk factors, and denoted the shape parameter of sector risk factor by linear combination of systematic risk factors multiples a parameter that reflects inner character of sector risk factor, that is a qualitative expansion to CreditRisk+ model. The developed model overcame the problem that inner character of sector risk factor is neglected in two-stage CreditRisk+ model, and derived compatible combination of two-fold systematic and sector risk factors. The new CreditRisk+ model can adopt general covariance matrix of sector risk factors into the framework of the model, thus overcame the prominent drawback that covariances between different sector risk factors are required to be equal in the compound Gamma CreditRisk+ model. We proved in this paper that all those original CreditRisk+ model, compound Gamma CreditRisk+ model and two-stage CreditRisk+ model are just exetreme situations of the new model, and in those extreme situations the covariance matrix of sector risk factors can not be adopted into those models properly, thus will influence the accuracy for calculating unexpected loss.

Keywords: *CreditRisk+ model, default correlation, sector character, multi-system risk factors*

作者简介：彭建刚，男，湖南长沙人，经济学博士，湖南大学研究院副院长，湖南大学金融学院教授、博士生导师，研究方向：金融管理与金融工程。

吕志华，男，江西抚州人，湖南大学金融学院博士研究生，研究方向：金融管理与金融工程。